

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز تمارين الموضوع حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل..(8 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالتحليل..(4 نقط)
- التمرين3 يتعلق بالأعداد العقدية.......................................(4 نقط)
- التمرين4 يتعلق بالحسابيات..(4 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر في الكتابة

التمرين1: (8 نقط)

الجزء I: - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=]-\infty,1[$ بما يلي: $f(x)=\ln(1-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 — 1- أ) بين أن الدالة f متصلة على I

0.25 — ب) بين أن الدالة f تناقصية قطعا على I

0.75 — ج) احسب $\lim_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

0.5 — د) أول مبيانيا النتائج المحصل عليها.

0.25 — ه) اعط جدول تغيرات f

0.25 — 2- أ) بين أن المنحنى (C) مقعر.

0.25 — ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 — 3- أ) بين أن الدالة f تقابل من I نحو $\mathbb{R}$
نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي.

0.25 — ب) حدد $f^{-1}(x)$ من اجل $x\in\mathbb{R}$

0.25 — ج) تحقق أن: $f^{-1}(-1)=1-e^{-1}$

الجزء II- لكل عدد حقيقي x و لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$، نضع:

$$P_n(x)=x+\frac{x^2}{2}+\dots\dots\dots+\frac{x^n}{n}$$

0.5 — 1- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n\in]0,1[$ بحيث: $P_n(x_n)=1$

0.5 — 2- حدد العدد الحقيقي $\alpha=x_2$ و تحقق أن: $0<\alpha<1$

0.5 — 3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، لدينا: $P_{n+1}(x_n)>1$

0.5 — ب) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$، المعرفة حسب ما سبق، تناقصية قطعا.

0.25 — ج) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، لدينا: $x_n\in]0,\alpha]$

0.25 — د) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$ متقاربة.

4- لكل عدد حقيقي $x\in I$ و لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$، نضع: $f_n(x)=f(x)+P_n(x)$

0.5 — أ) بين أن: $f_n'(x)=\frac{-x^n}{1-x}$ $\quad(\forall x\in I)\ ;\ (\forall n\geq2)$

0.25 — ب) بين أن: $|f_n'(x)|\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad(\forall x\in[0,\alpha])\ ;\ (\forall n\geq2)$

0.5 ج) استنتج أن: $\left|f_n(x)\right| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad (\forall n \geq 2)\ ;\ (\forall x \in [0,\alpha])$

0.5 د) بين أن: $\left|f(x_n)+1\right| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ $\quad (\forall n \geq 2)$

0.5 ه) استنتج قيمة $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

التمرين2: (4 نقط)

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}}\,dt$

0.5 1- أ) حدد إشارة $F(x)$ حسب قيم x

1 ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب مشتقتها الأولى $F'(x)$

0.5 2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx$

0.5 ب) احسب $\int_0^1 F(x)\,dx$

3- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$

0.5 أ) تحقق أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(n-k)F\left(\dfrac{k}{n}\right)$

0.5 ب) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}F\left(\dfrac{k}{n}\right)$

0.5 ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين3: (4 نقط)

m عدد عقدي مخالف للعددين 2 و $-i$ و المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E)\ :\ z^2-(m-i)z-im=0$

0.5 1) أ- تحقق ان مميز المعادلة (E) هو $(m+i)^2$

0.5 ب- حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

0.75 ج – علما أن $m=e^{i\frac{\pi}{8}}$ ، اكتب العدد z_1+z_2 على الشكل الأسي.

2) نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي 2 و $-i$ و m ولتكن M' مماثلة M بالنسبة للمحور التخيلي.

0.5 ا- حدد لحق النقطة M' بدلالة m

0.75 ب – حدد بدلالة m، لحق النقطة N بحيث يكون الرباعي $ANM'B$ متوازي الأضلاع

1 ج - بين أن المستقيمين (AM) و (BM') متعامدين إذا و فقط إذا كان: $\mathrm{Re}\left((2-i)m\right)=\mathrm{Re}\left(m^2\right)$

التمرين4: (4 نقط)

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2. نضع:

$$A=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6$$

ليكن p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A

1 1- أ) بين أن $a^7\equiv 1\ [p]$، استنتج أن: $a^{7n}\equiv 1\ [p]\quad;\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1 ب) بين أن a و p أوليان فيما بينهما، استنتج أن: $a^{(p-1)m}\equiv 1\ [p]\quad;\quad \forall m\in\mathbb{N}$

2- نفترض أن 7 لا يقسم $p-1$

0.5 أ) بين أن: $a\equiv 1\ [p]$

0.5 ب) استنتج أن: $p=7$

1 3- بين أنه إذا كان p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A فإن: $p=7$ أو $p\equiv 1\ [7]$

انتهى